

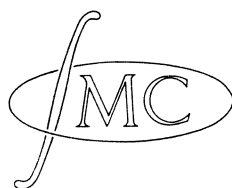
STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
REKENAFDELING

ZW 1963-011

Over Pythagorese en bijna-Pythagorese driehoeken en een
generatieproces met behulp van unimodulaire matrices

door

F.J.M. Barning



augustus 1963

0. Inleiding

Bij het onderzoek van Pythagorese driehoeken (d.z. rechthoekige driehoeken met de drie zijden van gehele lengte) maakt men dikwijls gebruik van de eigenschap, dat de zijden van deze driehoeken, op een gehele verhoudingsfactor na, kunnen worden uitgedrukt in een tweetal parameters. Zijn namelijk van een Pythagorese driehoek de rechtehoekszijden x en y en de schuine zijde z , met x, y en z relatief priem, x even, dan bestaan er twee gehele getallen a en b , zodanig dat

$$x=2ab, y=a^2-b^2, z=a^2+b^2.$$

Deze parametervoorstelling stelt ons met name in staat alle irreducible Pythagorese driehoeken (verzameling P) disjunct te genereren. Ook Ittmann [1] maakt van deze voorstelling gebruik bij het genereren van zekere deelverzamelingen van P .

Zoals in dit rapport zal worden aangetoond, is het disjunct genereren van de driehoeken van P ook op andere wijze mogelijk, namelijk door herhaalde uitvoering van zekere homogene lineaire transformaties. Deze transformaties zijn unimodulaire $(3,3)$ -transformaties, die opereren op de zijden van na elkander gegenereerde Pythagorese driehoeken.

Bij dit proces worden de zijden van een driehoek opgevat als de elementen van een 3-dimensionale vector; een zekere representant van P fungeert als start-driehoek.

Het is mogelijk om met behulp van de genererende matrices in P een vermenigvuldiging te definiëren tussen de elementen, zodat P een niet-Abelse halfgroep G wordt met deling en eenheidselement. We kunnen de driehoeken van P eeneenduidig afbeelden op de vertakkingspunten van een boom met drievoudige gerichte vertakking, en ze in verband hiermede drietallig nummeren. Een eenvoudige onderverdeling is mogelijk in klassen met constant absoluut verschil der rechthoekszijden. Deze methode van genereren met behulp van bepaalde matrices berust op de invariantie van de kwadratische vorm $x^2+y^2-z^2$ bij transformatie met deze matrices. Dit heeft tot gevolg, dat het eveneens mogelijk is met dezelfde genererende matrices gehele oplossingen te bepalen van de vergelijking $x^2+y^2=z^2+c$, met c een gehele constante. Deze

vergelijking wordt onderzocht voor $c=-1$ en $c=+1$, waarmee corresponderen de twee klassen van zgn. bijna-Pythagorese driehoeken (BP^- en BP^+). Ook hier is het mogelijk het generatieproces schematisch weer te geven door middel van een boomstructuur.

Speciale aandacht wordt besteed aan het genereren van die Pythagorese en bijna-Pythagorese driehoeken, waarvan de zijden in zekere lineaire relaties tot elkander staan.

Het blijkt o.a., dat de verschillende typen deelverzamelingen van P , die in [1] worden bestudeerd, elk een deelhalfgroep vormen van G , en dat zij zich afbeelden op rechte en zigzagpaden van de boom vanuit de top.

Het generatieproces voor het genereren van deze deelverzamelingen impliceert recursiebetrekkingen tussen de overeenkomstige zijden van drie na elkander gegenereerde exemplaren. Deze betrekkingen vertonen grote analogie met de recursiebetrekkingen, zoals die voorkomen in de theorie van de kettingbreuken.

1. Pythagorese driehoeken, de verzameling P

Zijn x en y de rechthoekszijden en z de schuine zijde van een Pythagorese driehoek dan voldoen x, y en z aan de Pythagorese vergelijking

$$(1) \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

We spreken het volgende af:

- a) Notatie: voor de aanduiding van een Pythagorese driehoek met rechthoekszijden x en y en schuine zijde z of van een gehele oplossing x, y, z van (1) gebruiken we de vectornotatie (x, y, z) , dikwijls afgekort tot $\underline{x}$.
- b) Twee Pythagorese driehoeken $\underline{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ en $\underline{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ heten "congruent", als zowel $|z_1| = |z_2|$ als $|x_1 y_1| = |x_2 y_2|$; anders "incongruent".
- c) $\underline{x} = (x, y, z)$ heet "irreducibel" als x en y relatief priem zijn, anders "reducibel". Spreken we zonder meer over een Pythagorese driehoek, dan bedoelen we daar meestal mee een irreducibele Pythagorese driehoek.

d) P is de verzameling van alle irreducibele Pythagorese driehoeken $\underline{x}=(x,y,z)$, waarbij we onderstellen $x,y,z>0$.

e) Onder het "genereren" van een driehoek wordt verstaan, het bepalen van diens zijden. De presentatie van $\underline{x}$, impliceert die van elke met $\underline{x}$ congruente driehoek.

Om uitgaande van een Pythagorese driehoek $\underline{x} = (x,y,z)$ van P een daarmee incongruente Pythagorese driehoek $\underline{x}' = (x',y',z')$ te genereren, onderzoeken we of er een geheel getal t bestaat, zodanig, dat $x'=t-x$, $y'=t-y$, $z'=t+z$ aan (1) voldoet. Er moet dus gelden $(t-x)^2 + (t-y)^2 = (t+z)^2$, zodat t dient te voldoen aan de vergelijking: $t^2 = 2t(x+y+z)$. $t=0$ levert de met $\underline{x}=(x,y,z)$ congruente driehoek $(x',y',z')=(-x,-y,z)$, die niet in aanmerking komt, zodat als mogelijkheid overblijft: $t=2(x+y+z)$ en dus $\underline{x}'=(x',y',z')=(x+2y+2z, 2x+y+2z, 2x+2y+3z)=A_1 \underline{x}$ met

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vanwege $z' > z > 0$ is de Pythagorese driehoek $\underline{x}'$ inderdaad incongruent met $\underline{x}$. A_1 noemen we een "genererende matrix", omdat door middel van A_1 door vorming van $A_1 \underline{x}$ uit elke gehele oplossing $\underline{x}$ van (1) weer een gehele oplossing $\underline{x}'$ van (1) wordt voortgebracht. (We spreken van het genereren met A_1 van $\underline{x}'$ uit $\underline{x}$).

Aangezien we ook hadden kunnen uitgaan van $(x,-y,z)$ of van $(-x,y,z)$ i.p.v. (x,y,z) zijn bijv. ook de matrices

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ en } A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

genererende matrices.

Deze transformatie van oplossingen van (1) berust op de eigenschap:

$$E1 \quad A_i^T J A_i = J \quad (i=1,2,3) \text{ met } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ d.w.z. de matrices } A_i$$

laten de kwadratische vorm $x^2 + y^2 - z^2$ invariant.

Andere eigenschappen zijn:

E2 De matrices A_i zijn unimodulair (d.w.z. $|A_i| = \pm 1$). De inverse matrices A_i^{-1} zijn dus ook unimodulair en tevens geheel. De matrices A_i^{-1} , die eveneens genererende matrices zijn, zijn gelijk aan de respectievelijke A_i op het teken van een viertal elementen na:

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

E3 Voor $i=2,3$ geldt $A_i^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

E4 Als $\underline{x}' = A_i \underline{x}$ ($i=1,2,3$) met $\underline{x}=(x,y,z)$ en $\underline{x}'=(x',y',z')$ geldt:

- a) $\underline{x}$ irreducibel $\Leftrightarrow \underline{x}'$ irreducibel.
- b) x even, y en z beide oneven $\Leftrightarrow x'$ even, y' en z' beide oneven.

E5 a) Voor $\underline{x}' = A_1 \underline{x}$ geldt: $|x'-y'| = |x-y|$.

b) Voor $\underline{x}' = A_i \underline{x}$ ($i=2,3$) geldt: $|x'-y'| = |x+y|$.

Laat M de verzameling zijn van alle matrices, die het eindige product zijn van matrices A_i ($i=1,2,3$). Voeg aan M toe het "lege" product, dat is de eenheidsmatrix I_3 . Nu geldt de volgende stelling:

Stelling: 1⁰. Elke matrix van M genereert uit een driehoek van P weer een driehoek van P .

2⁰. Bij elke Pythagorese driehoek $\underline{x}=(x,y,z)$, x even, van P behoort 1 en slechts 1 matrix $M(\underline{x}) \in M$, waarvoor $\underline{x} = M(\underline{x}) \underline{x}_0$ als $\underline{x}_0=(4,3,5)$. De matrices van M zijn disjunct, d.w.z.

$$A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_n} = A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_m},$$

geldt dan en slechts dan als $n=m$ en $i_k = j_k$ ($k=1, \dots, n$).

Alvorens deze stelling te bewijzen, merken we op, dat de stelling een generatieproces inhoudt voor het disjunct genereren van alle driehoe-ken van P , dat schematisch in een boomstructuur met drievoudige gerichte vertakking kan worden weergegeven (zie figuur 1). In dit afbeeldings-

model wordt elk vertakkingspunt geïdentificeerd met een driehoek van P . De driehoek $\underline{x}_0$ fungeert als top van de boom. Naar een vertakkingspunt V leidt één tak (uitgezonderd naar de top $\underline{x}_0$), terwijl in drie richtingen (zgn. 1-, 2-, en 3-richting) vanuit elk vertakkingspunt takken ontspruiten. De tak in de 1-richting wijst naar de Pythagorese driehoek verkregen uit de met V corresponderende driehoek door genereren met A_1 , die in de 2-richting naar de driehoek verkregen door genereren met A_2 en tenslotte die in de 3-richting naar de driehoek verkregen door genereren met A_3 .

We hadden ook als top van de boom kunnen kiezen de "driehoek" $(0,1,1)$, doch zowel A_1 als A_3 genereren hieruit de driehoek $\underline{x}_0=(4,3,5)$, terwijl A_2 weer $(0,1,1)$ teruggeeft. Mede omdat $(0,1,1)$ geen echte driehoek is, ligt het voor de hand als top te nemen de driehoek $\underline{x}_0=(4,3,5)$. De verzameling P is ook zo gedefinieerd, dat $(0,1,1)$ er niet toe behoort. Zoals uit het bovenstaande direct volgt, is het voor het bewijs van het tweede gedeelte van de stelling voldoende om aan te tonen, dat men elke Pythagorese driehoek van P 1 en slechts 1 vertakkingspunt van de boom correspondeert.

Bewijs van de stelling:

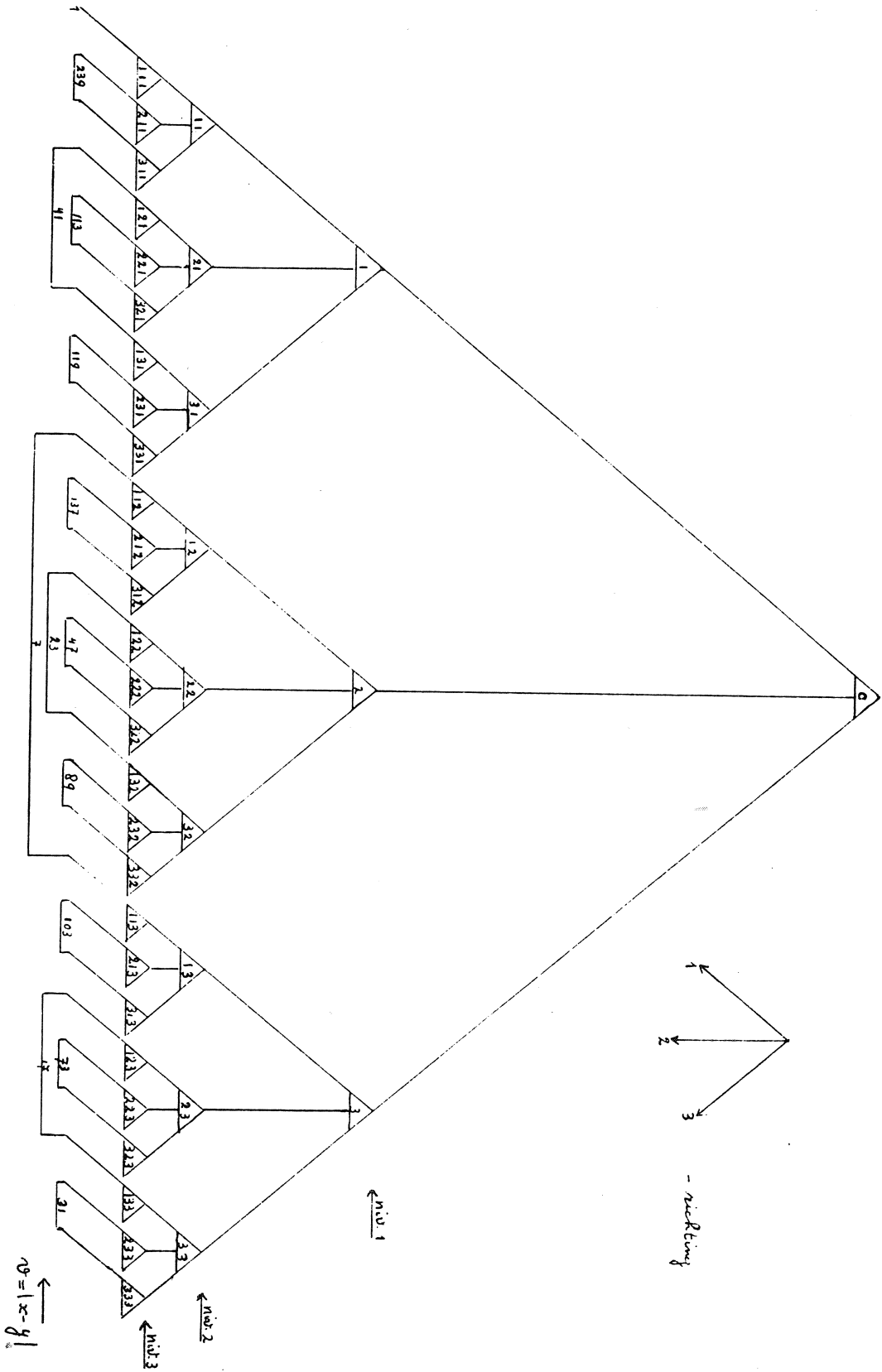
1. Uit eigenschap E1 volgt direct, dat uit een driehoek van P door toepassing van een matrix van M , weer een driehoek van P wordt gegenereerd.
- 2a) Zij $\underline{x}=(x,y,z)$ een driehoek van P , dus $\underline{x}$ irreducibel, $x,y,z > 0$ en stel $x=\text{even}$ (dus $y=\text{oneven}$, $z=\text{oneven}$).

Beschouw $\underline{x}'=(x',y',z') = A_1^{-1}\underline{x}$, waarbij dus (zie A_1^{-1} onder E2):

$$(2) \begin{cases} x' = x+2y-2z \\ y' = 2x+y-2z \\ z' = -2x-2y+3z. \end{cases}$$

Uit (2) volgt:

- a) $x'=\text{even}$, $y'=\text{oneven}$, $z'=\text{oneven}$, (zie E4b).
- b) $z' > 0$, want (wegens (1)) $(3z)^2 = 9(x^2+y^2) > 4(x+y)^2$. Daar $z > 0$ geldt $z' = 3z - 2(x+y) > 0$.



tabel 1

0: $\underline{x}_0 = (4, 3, 5)$.

niveau 1

1 : (20, 21, 29)
2 : (8, 15, 17)
3 : (12, 5, 13)

niveau 2

11 : (120, 119, 169)
21 : (36, 77, 85)
31 : (80, 39, 89)
12 : (72, 65, 97)
22 : (12, 35, 37)
32 : (56, 33, 65)
13 : (48, 55, 73)
23 : (28, 45, 53)
33 : (24, 7, 25)

niveau 3

111 : (696 , 697 , 985)
211 : (220 , 459 , 509)
311 : (456 , 217 , 505)
121 : (360 , 319 , 481)
221 : (52 , 165 , 173)
321 : (288 , 175 , 337)
131 : (336 , 377 , 505)
231 : (180 , 299 , 349)
331 : (176 , 57 , 185)
112 : (396 , 403 , 565)
212 : (136 , 273 , 305)
312 : (252 , 115 , 277)
122 : (156 , 133 , 205)
222 : (16 , 63 , 65)
322 : (132 , 85 , 157)
132 : (252 , 275 , 373)
232 : (120 , 209 , 241)
332 : (140 , 51 , 149)
113 : (304 , 297 , 425)
213 : (84 , 187 , 205)
313 : (208 , 105 , 233)
123 : (224 , 207 , 305)
223 : (44 , 117 , 125)
323 : (168 , 95 , 193)
133 : (88 , 105 , 137)
233 : (60 , 91 , 109)
333 : (40 , 9 , 41)

c) $y' < y$, want $x < z$ geeft $y' = 2(x-z) + y < y$.

d) $x' = 0 \rightarrow x + 2y = 2z \rightarrow x^2 + 4xy + 4y^2 = 4z^2 = 4x^2 + 4y^2 \rightarrow 4xy = 3x^2$. Voor $x \neq 0$ dus $4y = 3x$,
 $5x = 4z \rightarrow (x, y, z) = (4, 3, 5)$.

e) x' en y' niet beide ≤ 0 , want stel $x + 2y \leq 2z \rightarrow x^2 + 4xy + 4y^2 \leq 4z^2 = 4x^2 + 4y^2 \rightarrow$
 $\rightarrow 4xy \leq 3x^2 \rightarrow 4y \leq 3x$. Evenzo uit $2x + y \leq 2z$: $4x \leq 3y$. Dus $x = y = 0$: tegenspraak.

Zij nu $\underline{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ een willekeurige driehoek van P; wij zullen aan-
 tonen, dat $\underline{x}_1$ in de boom voorkomt. Stel $x_1 = \text{even}$.

Bepaal $\underline{x}_{1n} = (x_{1n}, y_{1n}, z_{1n}) = (A_1^{-1})^n \underline{x}_1$ voor de grootste gehele waarde van
 n waarvoor $x_{1n} > 0$ en tevens $y_{1n} > 0$. In verband met c) is er altijd zo'n
 maximale n te vinden, die we zullen noemen $n_{\max}$. Wegens E2 en b) is voor
 $n = n_{\max}$ de driehoek $\underline{x}_{1n}$ een driehoek van P, terwijl wegens a) en e) geldt:

$\delta f x_{1,n+1} \leq 0$ en $y_{1,n+1} > 0$ $\delta f x_{1,n+1} > 0$ en $y_{1,n+1} < 0$.

Stel nu voor $n = n_{\max}$: $(x_{1n}, y_{1n}, z_{1n}) \neq \underline{x}_0 = (4, 3, 5)$. Volgens d) is $x_{1,n+1} \neq 0$,
 zodat $x_{1,n+1}$ en $y_{1,n+1}$ van teken verschillen. Wegens b) en E2, E3, E4a)
 genereert nu juist één van de matrices A_2^{-1} , A_3^{-1} uit $\underline{x}_{1n}$ ($n = n_{\max}$) een
 driehoek $\underline{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ van P ($\underline{x}_2 = A_i^{-1} \underline{x}_{1n_{\max}}$ met $i = 2$ of 3), met (wegens a))
 $x_2 = \text{even}$, en dus $y_2, z_2 = \text{oneven}$.

Herhaal nu bovenstaand proces, doch ga nu uit van $\underline{x}_2$ i.p.v. $\underline{x}_1$, d.w.z.

bepaal $\underline{x}_{2n} = (A_1^{-1})^n \underline{x}_2$ voor de grootste gehele waarde van n waarvoor

$x_{2n} > 0$ en $y_{2n} > 0$, enz. Wegens E5 geldt: $v_2 = |x_2 - y_2| < |x_2 + y_2| = |x_{1,n_{\max}} - y_{1,n_{\max}}| =$
 $|x_1 - y_1| = v_1$.

Nemen we nu aan, dat bij deze transformatie van driehoeken de driehoek
 $\underline{x}_0$ nimmer zal optreden, dan kan het bovenbeschreven proces oneindig vaak
 herhaald worden, en we verkrijgen een oneindige rij driehoeken

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n), \dots$ waarvan de verschillen
 $v_1 = |x_1 - y_1|, v_2 = |x_2 - y_2|, \dots, v_n = |x_n - y_n|, \dots$ een monotoon dalende rij
 positieve getallen voorstellen. De verschillen v_i kunnen echter geen
 oneindige rij vormen, omdat er hoogstens v_1 termen voorkomen.

We hebben dus een tegenspraak gekregen en wel als gevolg van de aan-
 name, dat de driehoek $\underline{x}_0$ niet zal optreden. Het moet dus mogelijk
 zijn door toepassing van de genererende matrices A_i^{-1} in een zekere
 volgorde vanuit $\underline{x}_1$ de driehoek $\underline{x}_0$ te genereren.

Terugtransformatie met de genererende matrices A_i in omgekeerde volg-

orde als waarin gedurende het gehele proces vanuit $\underline{x}_1$ de matrices A_i^{-1} zijn toegepast, geeft dan uitgaande van $\underline{x}_0$ de oorspronkelijke driehoek $\underline{x}_1$ van P. Dit betekent, dat $\underline{x}_1$ tot de driehoeken van de boom behoort.

Opm. De bewijsmethode, die hier werd toegepast, waarbij men uitgaande van zekere onderstellingen uit een oplossing van (1) een oneindige verzameling andere oplossingen kan construeren met afnemende positieve $v=|x-y|$ staat bekend als de methode van de "infinite descent".

2b) Uit het bovenstaande volgt ook, dat voor elke $\underline{x}$ van P er een eenduidig bepaalde opeenvolging van takrichtingen in de boom bestaat om van $\underline{x}_0=(4,3,5)$ te komen tot $\underline{x}$. In geval nu twee verschillende vertakkingspunten van de boom met dezelfde driehoeken van P corresponderen, zou $\underline{x}_0$ niet alleen in de top, doch ook ergens anders in de boom moeten voorkomen. Dit is echter uitgesloten want bij genereren met A_1, A_2 of A_3 kan z slechts toenemen (wegens $x-y < z$). Hiermede is het bewijs geleverd.

Door de drievoudige vertakking van de boom kunnen we aan de uit $\underline{x}_0$ gegenereerde driehoeken van P een drietallig decodeerd nummer verbinden, bestaande uit een opeenvolging van cijfers die gelijk zijn aan 1, 2, of 3. In volgorde van rechts naar links corresponderen de cijfers van het nummer van een driehoek $\underline{x}$ met de richtingen 1, 2 of 3 van de opeenvolgende takken van het pad, dat vanuit de top $\underline{x}_0$ van de boom leidt naar $\underline{x}$. Elk nummer correspondeert met een pad vanuit $\underline{x}_0$ en dus met een bepaalde driehoek van P. We onderscheiden in de boom opeenvolgende niveaus. Van de in figuur 1 geschetste 3 niveaus zijn in tabel 1 de bijbehorende driehoeken genoteerd, voorzien van de nummering, zoals die ook in figuur 1 bij de betreffende "vertakkingsdriehoeken" staat aangegeven. Op willekeurige plaatsen kan men aan het nummer van een driehoek nullen toevoegen. Het cijfer 0 correspondeert met de uitvoering van de identieke transformatie.

Aan de topdriehoek $\underline{x}_0$ wordt het nummer 0 toegekend.

Het is nu mogelijk om in P een eenvoudig voorschrift te definiëren, volgens hetwelk aan elk tweetal elementen $\underline{x}_i$ en $\underline{x}_j$ van P een derde

element $\underline{x}_k$ van P wordt toegevoegd, dat we het "product" van $\underline{x}_i$ en $\underline{x}_j$ zullen noemen ($\underline{x}_k = \underline{x}_i \circ \underline{x}_j$). Is namelijk $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ het nummer van $\underline{x}_i$ en $\{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ het nummer van $\underline{x}_j$, dan is $\underline{x}_i \circ \underline{x}_j$ per definitie die Pythagorese driehoek $\underline{x}_k$, waarvan het nummer gelijk is aan $\{i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_m\}$. Zoals direct hieruit volgt, geldt de associatieve wet: $(\underline{x}_1 \circ \underline{x}_2) \circ \underline{x}_3 = \underline{x}_1 (\underline{x}_2 \circ \underline{x}_3)$. Men lette er op, dat de commutatieve eigenschap $\underline{x}_1 \circ \underline{x}_2 = \underline{x}_2 \circ \underline{x}_1$ in het algemeen niet geldt.

Het vermenigvuldigen van twee Pythagorese driehoeken komt dus in de boom neer op het "optellen" van de takken der bijbehorende paden.

Met deze invoering van de vermenigvuldiging vormt de verzameling P (of hiermede equivalent alle positieve gehele irreducibele oplossingen van (1)) nu dus een niet-Abelse halfgroep G met eenheidselement ($= \underline{x}_0$). G is een halfgroep met deling, want uit $\underline{x}_1 \circ \underline{x}_2 = \underline{x}_1 \circ \underline{x}_3$ volgt $\underline{x}_2 = \underline{x}_3$, hetgeen ook het geval is als $\underline{x}_2 \circ \underline{x}_1 = \underline{x}_3 \circ \underline{x}_1$.

Opm. Genereren we vanuit $\underline{x}_0$ niet alleen met A_i , doch ook met A_i^{-1} ($i=1,2,3$) d.w.z. breiden we de boom van figuur 1 vanaf de top uit met takken in richtingen tegengesteld aan de 1,2 en 3-richting, dan ontstaan alle irreducibele Pythagorese driehoeken (x,y,z) met $z > 0$. Omdat in deze verzameling elk element nu een "inverse" bezit, is hiermede de halfgroep G uitgebreid tot een groep.

De methode, die aan het bewijs van het tweede gedeelte van de stelling ten grondslag lag, kwam neer op het genereren van een rij Pythagorese driehoeken met monotoon afnemend positief verschil der rechthoekszijden. Men kan zich nu afvragen, welke verschillen $v = |x-y|$ en ook welke sommen $s = x+y$ voor de driehoeken (x,y,z) van P in aanmerking komen, en waar in de boom de driehoeken zijn gelegen, die aan deze sommen en verschillen beantwoorden. Zij $\underline{x} = (x,y,z)$ een driehoek van P . De som $s = x+y$ is zoals eenvoudig kan worden aangetoond noodzakelijk gelijk aan $\pm 1 \pmod{8}$. Het aantal splitsingen van een natuurlijk getal g in twee gehele getallen g_1 en g_2 , beide ≥ 0 ($g_1 + g_2 = g$), waarbij $g_1^2 + g_2^2$ een kwadraat is, (zgn. splitsing van g in een Pythagorees paar g_1, g_2) hangt alleen af van de multipliciteit van de priemfactoren van g van genoemde vorm, $\pm 1 \pmod{8}$. Is namelijk $g = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ met $p_1, p_2, \dots, p_n$ alle

verschillende priemfactoren van g van de genoemde vorm, dan is het aantal splitsingsmogelijkheden van g volgens Pepin [2] (zie ook Fermat [3]) gelijk aan $\frac{1}{2}\{(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)\cdots(2\alpha_n+1)+1\}$. Slechts voor het geval $p \neq 1$ zijn er geen irreducibele splitsingen (d.w.z. g_1 en g_2 bevatten dan altijd een gemeenschappelijke deler $\neq 1$). Dit betekent dat van de driehoeken (x,y,z) van P juist die sommen $s=x+y$ zullen optreden waarvan de priemfactorontbinding slechts bestaat uit priemfactoren van de vorm $\pm 1 \pmod{8}$. Voegen we aan de verzameling P de driehoek $(0,1,1)$ toe, zodat $s=1$ ook als som van een x,y -paar voorkomt, dan volgt uit eigenschap E5 b), dat elk absoluut verschil tussen de rechthoekszijden van een driehoek van P ook als som van rechthoekszijden optreedt. Dit betekent dus dat ook juist die verschillen $v=|x-y|$ zullen optreden bij de driehoeken (x,y,z) van P die of gelijk zijn aan 1 of een priemfactorontbinding bezitten, slechts bestaande uit priemfactoren van de vorm $\pm 1 \pmod{8}$.

Volgens E5a behoort in de boom bij elk recht pad in de 1-richting (d.i. een pad bestaande uit uitsluitend takken in de 1-richting, in onbegrensd aantal) een aan deze eigenschappen beantwoordend bepaald absoluut verschil der rechthoekszijden van de op dit pad gelegen driehoeken. In figuur 1 onderaan zijn bij de paden in de 1-richting, die gaan door de driehoeken van de eerste 3 niveaus, de bijbehorende verschillen $|x-y|$ aangegeven.

Daar zoals eenvoudig kan worden aangetoond onder het aantal splitsingen $g = a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n}$ met $a_1, \dots, a_n$ ($n \geq 1$) verschillende priemfactoren van de gedaante $\pm 1 \pmod{8}$, juist 2^{n-1} splitsingen voorkomen, die irreducibel zijn, geldt tevens, dat bij elk getal s van de vorm van g er juist 2^{n-1} driehoeken (x,y,z) van P bestaan, waarvoor $x+y=s$, en dat bij elk getal v van de vorm g in de boom juist $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ driehoeken zijn aan te wijzen, waarin de rechte paden in de 1-richting ontspruiten, die uitsluitend en tesamen ook juist alle driehoeken (x,y,z) van P bevatten, waarvoor $|x-y|=v$.

Voor $v=1$ bestaat er juist één zo'n pad van driehoeken, dat zijn oorsprong heeft in x_0 .

Ter toelichting geven we het volgende voorbeeld:

Zij $g=7 \cdot 17 \cdot 23 = 2737$.

g bevat de volgende $\frac{1}{2}(3^3+1)=14$ splitsingen in Pythagorese paren x,y .

x		y
0		2737
460		2277
564	*	2173
748		1989
952		1785
1032	*	1705
1120		1617
1312	*	1425
1564		1173
1840		897
1932		805
2448		289
2548		189
2664	*	73

De met * gemerkte splitsingen zijn de $2^{3-1}=4$ irreducibele gevallen.
Hierbij behoren de volgende 4 driehoeken van P :

$(x,y,z) = (564, 2173, 2245)$, driehoeksnummer : $2^3 3^2 1^1$
 $(x,y,z) = (1032, 1705, 1993)$, " " : $2^2 3^1$
 $(x,y,z) = (1312, 1425, 1937)$, " " : 1321
 $(x,y,z) = (2664, 73, 2665)$, " " : 3^{35} .

Dit zijn de enige 4 driehoeken (x,y,z) van P met $s=x+y=2737$.

Passen we op dit viertal de transformaties A_2 en A_3 toe, dan ontstaan de volgende 8 driehoeken:

- 1) i^n ($n \geq 0$) als symbool ergens in een nummer betekent een verkorte schrijfwijze voor n maal achterelkaar het cijfer i ($i=1,2,3$) ter plaatse; $i^0=0$.

$(x, y, z):$	driehoeksnummer:
(708, 3445, 3517)	$2^4 3 2^2$
(8272, 5535, 9953)	$3 2^3 3 2^2$
(1608, 4345, 4633)	$2^2 3 1^2$
(6364, 3627, 7325)	$3 2 3 1^2$
(2336, 5073, 5585)	$2 1 3 2 1$
(5412, 2675, 6037)	$3 1 3 2 1$
(7848, 10585, 13177)	$2 3^{35}$
(2812, 75, 2813)	3^{36}

In deze 8 driehoeken ontspringen de 8 rechte paden in de 1-richting, die uitsluitend en tesamen ook juist alle driehoeken (x,y,z) van P bevatten, waarvoor $v = |x-y| = 2737$.

(Voor elke driehoek $\underline{x}$ met deze eigenschap bestaat er één en slechts één geheel getal $n \geq 0$, zodat $\underline{x} = A_1^n \underline{x}_0$ voor $\underline{x}_0$ gelijk aan één en slechts één van bovenstaande 8 driehoeken).

2. Bijzondere deelverzamelingen van P

We zullen nu aangeven, op welke wijze men in de verzameling P de Pythagorese driehoeken kan genereren, waarvan de zijden aan zekere lineaire relaties voldoen. De bewijzen voor de te geven generatiemethoden laten we achterwege, omdat deze eenvoudig kunnen worden geleverd volgens dezelfde principen als toegepast in 1.

De verschillende deelverzamelingen van P, die we beschouwen, beelden zich in de boom van figuur 1 af op rechte of zigzagpaden vanuit $\underline{x}_0 = (4,3,5)$. Zie de figuren 1' en 1'', waarin voor een aantal beginniveaux de driehoeken van de te beschouwen verzamelingen schematisch zijn weergegeven. De getallen bij de hoekpunten geven de lengten der zijden aan.

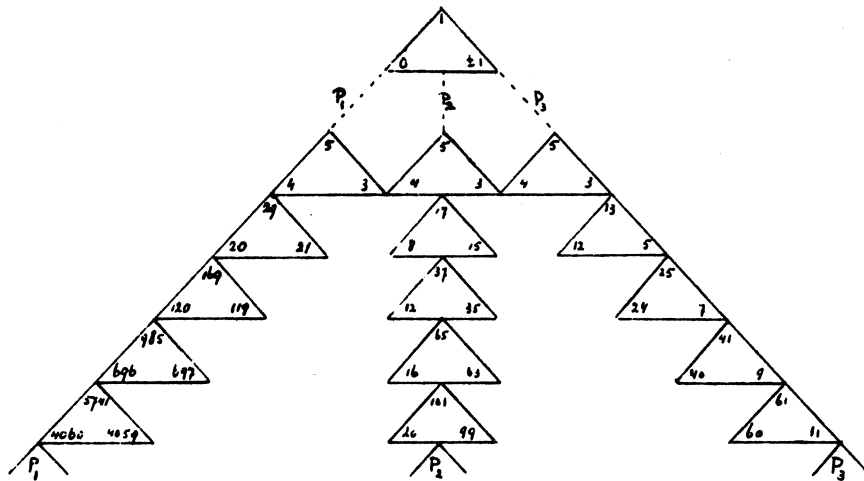


Fig. 1'

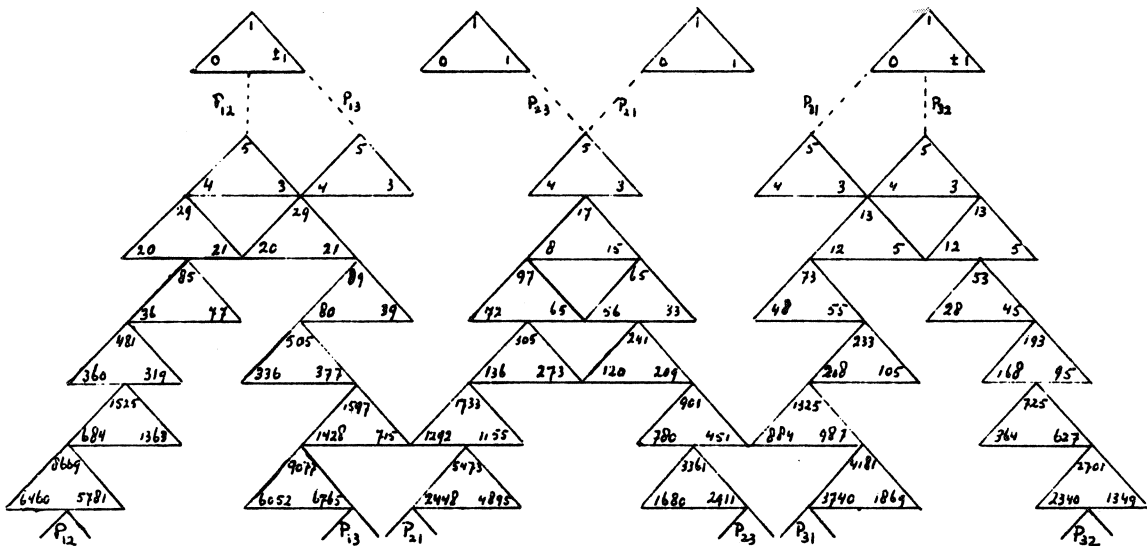


Fig. 1''

- a) Uitgaande van $(0,1,1)$ genereert men door toepassing van A_1^n , voor $n \geq 1$ (of voor $n \geq 0$ uitgaande van $\underline{x}_0 = (4,3,5)$) uitsluitend en ook juist alle Pythagorese driehoeken (x,y,z) van P waarvoor geldt: $|x-y|=1$ (vergelijk Fermat [4]).

In de boom liggen deze driehoeken, die tesamen de deelverzameling P_1 van P vormen, op het rechte pad vanuit $\underline{x}_0$ in de 1-richting (de driehoeken $(4,3,5)$, $(20,21,29)$, $(120,119,169)$ enz., zie figuur 1').

P_1 vormt een deelhalfgroep van G met deling en eenheidselement $(\underline{x}_0)$.

Opm. Zij $\underline{x}_{n+1} = A_1 \underline{x}_n$ en stellen we voor $i=n, n+1$:

$x_i = (a_i^2 - b_i^2)/2$, $y_i = a_i b_i$, $z_i = (a_i^2 + b_i^2)/2$ (d.i. een parametervoorstelling van de irreducibele oplossingen van (1) analoog aan die welke in de inleiding is gegeven, nu met a_i, b_i oneven > 0) en $a_{i-1} = b_i$, dan geldt wegens $x_{n+1} = x_n + 2y_n + 2z_n$:

$$(a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2)/2 = (a_{n+1}^2 - a_n^2)/2 = (a_n^2 - b_n^2)/2 + 2a_n b_n + a_n^2 + b_n^2 = (a_n^2 - a_{n-1}^2)/2 + 2a_n a_{n-1} + a_n^2 + a_{n-1}^2, \text{ of } a_{n+1}^2 = (2a_n + a_{n-1})^2; \text{ dus wegens } a_i > 0: a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}.$$

Deze relatie is in overeenstemming met de recursiebetrekking (6) van [1]. Om alle exemplaren te genereren kiese men dan als startwaarden $a_0 = b_0 = b_1 = 1$, $a_1 = 3$.

- b) Uitgaande van $(0,-1,1)$ genereert men door toepassing van A_2^n voor $n \geq 1$ (of voor $n \geq 0$ uitgaande van $\underline{x}_0$) uitsluitend en ook juist alle Pythagorese driehoeken (x,y,z) van P waarvoor geldt $z-y=2$.

In de boom liggen deze driehoeken, die tesamen de deelverzameling P_2 vormen, op het rechte pad vanuit $\underline{x}_0$ in de 2-richting (de driehoeken $(4,3,5)$, $(8,15,17)$, $(12,35,37)$ enz., zie figuur 1'). P_2 vormt evenals P_1 een deelhalfgroep van G met deling en eenheidselement $(\underline{x}_0)$. De x -waarden van de driehoeken van P_2 doorlopen alle positieve viervouden.

- c) Uitgaande van $(0,1,1)$ genereert men door toepassing van A_3^n voor $n \geq 1$ (of voor $n \geq 0$ uitgaande van $\underline{x}_0$) uitsluitend en ook juist alle

Pythagorese driehoeken (x,y,z) van P , waarvoor geldt $z-x=1$.

In de boom liggen deze driehoeken die tesamen de deelverzameling P_3 van P vormen, op het rechte pad vanuit $\underline{x}_0$ in de 3-richting (de driehoeken $(4,3,5), (12,5,13), (24,7,25)$ enz. zie figuur 1').

Ook P_3 vormt een deelhalfgroep van G met deling en eenheidselement $(\underline{x}_0)$.

De y -waarden van de driehoeken van P_3 doorlopen alle oneven getallen ≥ 3 .

d) Beschouwen we nu de Pythagorese driehoeken (x,y,z) van P , waarvoor $|2r-z|=1$ (r = een rechthoekszijde), dan zij dit juist de driehoeken die uit $(0,1,1)$ kunnen worden gegenereerd door afwisselend toe te passen de genererende matrices A_3 en A_2 . In de boom liggen deze driehoeken, die tesamen de deelverzameling P_{23} van P vormen, op het zigzagpad vanuit $\underline{x}_0$ met afwisselend takken (in onbegrensd aantal) in de 2- en 3-richting (de driehoeken $(4,3,5), (8,15,17), (56,33,65)$ enz., zie figuur 1'').

Het is ook mogelijk om evenals in de gevallen a), b), c) met slechts 1 matrix de driehoeken van P_{23} te genereren, namelijk met de matrix

$$A'_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ die uit } A_3 \text{ ontstaat door verwisseling van de}$$

eerste en tweede rij en waarvoor geldt $A_3'^2 = A_{23} = A_2 \cdot A_3$.

Het enige verschil is, dat van de opeenvolgende gegenereerde driehoeken de eerste rechthoekszijde x nu afwisselend oneven en even is. P_{23} vormt nu ook een halfgroep met deling en eenheidselement $(\underline{x}_0)$. Dit is ook het geval met de verzameling driehoeken met nummer $(32)^n$, $n=0,1,\dots$, (genererende matrix $A_{32} = A_3 \cdot A_2$), die een deelverzameling vormt van P_{23} en bovendien een deelhalfgroep van G .

Voor de verzamelingen Pythagorese driehoeken overeenkomende met de gevallen a) t/m d) geeft Ittmann in [1] aan hoe men met behulp van de parametervoorstelling voor de Pythagorese driehoeken elke verzameling kan genereren. Het blijkt dat ook deze parametermethode voor de bedoelde gevallen disjunct alle driehoeken levert.

e) Andere deelverzamelingen van P , waarvan de driehoeken zich afbeelden op zigzagpaden vanuit $\underline{x}_0$ zijn $P_{12}, P_{13}, P_{21}, P_{31}$ en P_{32} (zie figuur 1"). Evenals bij P_{23} bestaan er zekere lineaire relaties tussen de zijden van de driehoeken van elke verzameling. We vermelden de volgende bijzonderheden: (in het volgende is r een rechthoekszijde en r' de andere rechthoekszijde).

P_{12} : Genererende matrices: afwisselend A_2 en A_1 , vanuit $(0, -1, 1)$.

Eigenschappen der driehoeken: afwisselend: a) $|2r - r'| = 5$

b) $|3r - 2z| = 5$.

Opm. P_{12} valt dus uiteen in twee deelverzamelingen I en II, waarvan de

driehoeken resp. voldoen aan a) en b). De matrices $A_{21} = A_2 \circ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

resp. $A_{12} = A_1 \circ A_2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 12 \\ 8 & -9 & 12 \\ 12 & -12 & 17 \end{pmatrix}$ kunnen worden opgevat als de genererende

matrices voor de driehoeken van I resp. II, uitgaande van $(-4, -3, 5)$ resp. $(0, -1, 1)$. I resp. II bevatten ook juist alle driehoeken met de eigenschappen a) resp. b).

P_{21} : Genererende matrices: afwisselend A_1 en A_2 , vanuit $(0, 1, 1)$.

Eigenschappen der driehoeken: afwisselend: a) $|3r - 2z| = 1$

b) $|2r - r'| = 1$.

Hierbij geldt dezelfde opmerking als boven echter met verwisseling van A_{12} en A_{21} en als uitgangspunt voor het genereren van I zowel als II de driehoek $(0, 1, 1)$.

P_{13} : Genererende matrices: afwisselend A_3 en A_1 , vanuit $(0, 1, 1)$.

Eigenschappen der driehoeken: afwisselend: a) $|2r - r'| = 2$

b) $|3r - 2z| = 2$.

Ditmaal bestaat P_{13} echter niet uit alle driehoeken met een der eigenschappen a), b). Deze zelfde eigenschappen hebben nl. -ook weer in afwisseling, nu beginnend met b)- de driehoeken in de verzameling

P_{31} : Genererende matrices: afwisselend A_1 en A_3 , vanuit $(0, 1, 1)$.

Wel is het zo dat de somverzameling $P_{13} + P_{31}$ juist alle driehoeken met hetzij de eigenschap a), hetzij de eigenschap b) bevat.

De somverzameling $P_{13} + P_{31}$ valt uiteen in twee verzamelingen I en II, respectievelijk bevattende alle driehoeken met eigenschap a) en alle driehoeken met eigenschap b). Tot I behoren:

(4,3,5), (12,5,13), (80,39,89), (208,105,233), (1428,715,1597), (3740,1869,4181) enz. en tot II behoren

(4,3,5), (20,21,29), (48,55,73), (336,377,505), (884,987,1325), (6052,6765,9077) enz.

Opmerking. De matrices $A_{31} = A_3 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ resp $A_{13} = A_1 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} -9 & 8 & 12 \\ -8 & 9 & 12 \\ -12 & 12 & 17 \end{pmatrix}$,

die blijkbaar uit A_{21} en A_{12} ontstaan door verwisseling van de eerste twee rijen en kolommen, kunnen worden opgevat als de genererende matrices voor P_{13} en P_{31} .

P_{32} : Genererende matrices: afwisselend A_2 en A_3 , vanuit (0,-1,1) of alleen met $A_3'' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (d.i. A_3 met verwisseling van de eerste

twee kolommen; $A_3''^2 = A_{32} = A_3 \cdot A_2$); in het laatste geval is bij de genereerde driehoeken x afwisselend oneven en even.

Eigenschap der driehoeken: $|2r-z|=3$.

Opm. Het geval is analoog aan dat van $P_{23} \cdot P_{32}$ bevat ook juist alle driehoeken met genoemde eigenschap.

Voor de boven onder e) genoemde deelverzamelingen gelden analoge groeps-eigenschappen als voor P_{23} .

3. Recursiebetrekkingen

1) Zij $\underline{x}_n = A_1^n \underline{x}_0$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{x}_n = (x_n, y_n, z_n)$, $\underline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (4, 3, 5)$.

Dan geldt zoals eenvoudig kan worden aangetoond ($n=0(1)\dots$)

$$(3) \begin{cases} x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n + 4(-1)^n v \\ y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n + 4(-1)^{n+1} v \\ z_{n+2} = 6z_{n+1} - z_n \end{cases}$$

met $v = x_0 - y_0$.

Deze recursiebetrekkingen gelden voor 3 "operevolgende" driehoeken van de verzameling P_1 . De quotiënten $x_{n+1}/x_n, y_{n+1}/y_n, z_{n+1}/z_n$ naderen voor $n \rightarrow \infty$ tot $3+2\sqrt{2} \approx 5.83$.

Dit wijst op het weinig frequent voorkomen van de Pythagorese driehoeken met verschil van de rechthoekszijden gelijk aan 1 (zie 2.a), vergelijk ook Ittmann [1]).

2) Zo zijn voor alle gevallen, waarin gegenereerd wordt met een bepaalde genererende matrix of met een bepaalde periodieke aaneenschakeling van genererende matrices eenvoudige recursiebetrekkingen op te stellen tussen de overeenkomstige zijden van 3 operevolgende driehoeken. We geven hier alleen de recursiebetrekkingen voor de driehoeken van de verzamelingen P_2, P_3, P_{23} en P_{32} . Overal geldt weer $\underline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (4, 3, 5)$ en $\underline{x}_n = (x_n, y_n, z_n)$.

a) P_2 : Zij $\underline{x}_n = A_2^n \underline{x}_0$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ en $z_0 - y_0 = v$, dan gelden de recursiebetrekkingen: ($n=0(1)\dots$)

$$(4) \begin{cases} x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n & (\rightarrow x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n) \\ y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + 4v \\ z_{n+2} = 2z_{n+1} - z_n + 4v \end{cases}$$

De quotiënten $x_{n+1}/x_n, y_{n+1}/y_n, z_{n+1}/z_n$ naderen voor $n \rightarrow \infty$ tot 1. De driehoeken van P_2 komen dus vrij frequent voor. De x-waarden van operevolgende driehoeken van P_2 vormen immers ook een rekenkundige rij (zie 2.b)).

- b) P_3 : idem als a) bij verwisseling van x en y en vervanging van A_2 door A_3 (zie 2.c)).
- c) P_{23} : Zij $\underline{x}_n = A_3'^n \underline{x}_0$, $A_3' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ en $z_0 - 2y_0 = v$, dan gelden de recursiebetrekkingen:
($n=0(1)\dots$)

$$(5) \begin{cases} x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n \\ y_{n+2} = 4y_{n+1} - y_n + 4(-1)^{n+1}v \\ z_{n+2} = 4z_{n+1} - z_n + 2(-1)^{n+1}v \end{cases} \quad (\text{zie de recursierelatie (10) van [1]}).$$

De quotiënten x_{n+1}/x_n , y_{n+1}/y_n , z_{n+1}/z_n naderen voor $n \rightarrow \infty$ tot $2+\sqrt{3} \approx 3.73$.

Ook de driehoeken van P_{23} komen dus weinig frequent voor (zie 2.d)).

- d) P_{32} : idem als c) bij verwisseling van x en y en vervanging van A_3' door A_3'' (zie 2.e)).

Opm. a) Boven beschouwde unimodulair matrices hebben één rationale eigenwaarde die gelijk is aan +1 of -1. De eigenwaarde +1 treedt op als de determinant van de matrix gelijk is aan +1; de eigenwaarde -1 als de determinant gelijk is aan -1.

De recursiefactoren 6, 2 en 4 in de formules (3), (4), en (5) zijn gelijk aan de coëfficiënt a van de kwadratische veelterm $-\lambda^2 + a\lambda - 1$, die ontstaat na deling van de karakteristieke veelterm $\det(A - \lambda I)$ door de lineaire factor $\lambda \pm 1$ voor resp. $A=A_1, A_2(A_3)$ en $A_3' (A_3'')$. a is gelijk aan het absolute verschil van de determinant en de spoor van de betreffende matrices.

- b) Uit de recursierelaties, zoals bijv. gegeven door (3), (4) en (5) kunnen op eenvoudige wijze formules worden afgeleid voor x_n, y_n , en z_n als functie van n voor de opeenvolgende driehoeken van de bijbehorende verzamelingen.

Zo volgt bijv. voor P_1 uit $z_{n+2} = 6z_{n+1} - z_n$ van (3), dat $z_n = c_1(\sqrt{2}+1)^{2n} + c_2(\sqrt{2}-1)^{2n}$.

Wegens $z_0=5$ en $z_1=29$ geldt $c_1+c_2=5$ en $c_1(\sqrt{2}+1)^2+c_2(\sqrt{2}-1)^2=29$,
 en dus $c_1=\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)^3$ en $c_2=\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^3$.

Stellen we $\frac{1}{2}(x_n+y_n)=u_n$, dan voldoen u_n aan hetzelfde verband:

$u_{n+2}=6u_{n+1}-u_n$ en dus $u_n=c_1'(\sqrt{2}+1)^{2n}+c_2'(\sqrt{2}-1)^{2n}$. Nu is $u_0=3\frac{1}{2}$ en $u_1=20\frac{1}{2}$,
 zodat $c_1'+c_2'=3\frac{1}{2}$ en $c_1'(\sqrt{2}+1)^2+c_2'(\sqrt{2}-1)^2=20\frac{1}{2}$, en dus $c_1'=\frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)^3$ en
 $c_2'=-\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)^3$.

Hieruit volgt dus voor P_1 voor $n=0(1)\dots$:

$$(6) \begin{cases} x_n, y_n = \frac{1}{4} \{ (\sqrt{2}+1)^{2n+3} - (\sqrt{2}-1)^{2n+3} \} \pm \frac{1}{2} \\ z_n = \frac{1}{4}\sqrt{2} \{ (\sqrt{2}+1)^{2n+3} + (\sqrt{2}-1)^{2n+3} \}. \end{cases}$$

De formules (6) kunnen ook worden afgeleid uit de algemene oplossing van de Pellse vergelijking $p^2-2q^2=1$ die ontstaat indien we in de vergelijking $x^2+(x+1)^2=z^2$ stellen $2x+1=ip$ en $z=iq$, ($i^2=-1$).

c) De Pythagorese driehoek (12,5,13) van P_3 heeft met (20,21,29) van P_1 gemeen, dat de schuine zijde 8 verschilt van een rechthoekszijde. Wenst men alle Pythagorese driehoeken van P te genereren met deze eigenschap, dan kan men herhaald A_2 toepassen en als startdriehoeken gebruiken $\underline{x}_0'=(4,-3,5)$ en $\underline{x}_0''=(-4,-3,5)$.

Zo ontstaan dan twee rijen driehoeken:

I: (4,-3,5), (20,21,29), (36,77,85), (52,165,173), (68,285,293),
 (84,437,445) enz.

en

II: (-4,-3,5), (12,5,13), (28,45,53), (44,117,125), (60,221,229),
 (76,357,365) enz.

Voor beide rijen gelden dus de recursierelaties (4), nu met $v=8$. We merken hierbij op, dat (afgezien van het teken van de zijden) de driehoeken van rij II (I) ook kunnen worden gevormd door rij I (II) vanuit $\underline{x}_0'$ ($\underline{x}_0''$) aan te vullen met driehoeken, die ontstaan door herhaald genereren met de genererende matrix A_2^{-1} .

Een ander procédé is: starten met $\underline{x}_0''$ en als genererende matrix gebruiken de unimodulaire gebroken matrix

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dit geeft de rij driehoeken:

$(-4, -3, 5), (4, -3, 5), (12, 5, 13), (20, 21, 29), (28, 45, 53), (36, 77, 85),$
 $(44, 117, 125), (52, 165, 173)$ enz.

Omdat $A_4^2 = A_2$, is deze somrij zó samengesteld, dat de oneven termen juist de termen van I vormen en de even termen die van II in de gegeven volgorde.

Voor deze somrij gelden weer de recursiebetrekkingen (4), nu met $v=2$.

4. Bijna - Pythagorese driehoeken, de verzameling BP

Een bijna - Pythagorese driehoek is een driehoek met gehele zijden x, y , en z , zó dat de som van de kwadraten van x en y 1 verschilt van het kwadraat van z .

Deze driehoeken zijn dus "bijna rechthoekig"; voor het gemak spreken we ook hier van de "rechthoekszijden" x en y en de "schuine zijde" z . x, y en z voldoen dus aan de vergelijking:

$$(7) \quad x^2 + y^2 = z^2 + c$$

met $c = \pm 1$.

We maken weer soortgelijke afspraken als in 1, omtrent notatie, congruentie van driehoeken enz.

BP is de verzameling bijna-Pythagorese driehoeken (x, y, z) , waarbij we onderstellen $x, y, z > 0$. BP valt uit een in twee deelverzamelingen BP^- en BP^+ resp. voor de gevallen $c = -1$ en $c = +1$.

Opm. Elk drietal gehele waarden x, y, z , dat aan (7) voldoet voor $c = \pm 1$, is steeds relatief priem. Elke bijna-Pythagorese driehoek is dus irreducibel.

In eerste instantie is ons doel alle driehoeken van BP^- en BP^+ te genereren, uitgaande van zekere representanten van beide verzamelingen. De matrices A_1, A_2, A_3 enz. zijn weer genererende matrices, want zij laten de kwadratische vorm $x^2 + y^2 - z^2$ invariant (zie E1) en voeren dus gehele oplossingen van (7) in gehele oplossingen over.

A. $c=-1$.

We passen hetzelfde generatieproces toe als in het Pythagorese geval, echter, teneinde het optreden van onderling congruente driehoeken te vermijden, met deze restrictie dat het genereren met A_3 vervalt, zodra geopereerd wordt op een driehoek met gelijke rechthoekszijden (dit geval kan zich hier wel, zich echter niet bij de Pythagorese driehoeken van P voordoen).

Als startdriehoek kiezen we de driehoek $\underline{x}_0 = (2, 2, 3)$ (eventueel $0, 0, 1$), doch A_1, A_2 en A_3 op deze "driehoek" toegepast geven $\underline{x}_0$.

We beelden de driehoeken weer af op de vertakkingspunten van een boom met $\underline{x}_0$ als top. In alle vertakkingspunten van de boom is drievoudige gerichte vertakking, behalve in die van het rechte pad vanuit $\underline{x}_0$ in de 1-richting, waarop juist de driehoeken (x, y, z) zijn gelegen met gelijke x en y , en waar dus slechts tweevoudige gerichte vertakking optreedt (zie figuur 2).

Nu geldt analoog aan het Pythagorese geval, dat de boom slechts driehoeken van BP^- bevat, en dat ook alle driehoeken van BP^- disjunct worden gegenereerd. De verzameling BP^- vormt weer een halfgroep met deling en eenheidselement ($\underline{x}_0$). Dat de boom slechts driehoeken van BP^- bevat en dat ook elke driehoek van BP^- in de boom voorkomt kan op dezelfde wijze bewezen worden als in het Pythagorese geval (door middel van het "aflagingsproces", dat uiteindelijk moet voeren tot de driehoek $\underline{x}_0$). Dat de driehoeken van BP^- disjunct worden gegenereerd, vraagt een iets moeilijker bewijs dan in het Pythagorese geval, omdat nu de rechthoekszijden x en y van de driehoeken van BP^- niet van verschillende pariteit zijn (n.l. beide even), waardoor we dus ook moeten bewijzen, dat met (x, y, z) , $x \neq y$, in de boom niet voorkomt de driehoek (y, x, z) .

Dat dit laatste inderdaad niet het geval is beruŕt op de ingevoerde restrictie bij het genereren met A_3 . Het is nl. zó, dat van BP^- de driehoeken (x,y,z) en (y,x,z) , $x \neq y$, dan en slechts dan beide in de boom zullen optreden als ergens in de boom vanuit een driehoek met gelijke rechthoekszijden ook wordt gegenereerd met A_3 .

In tabel 2 zijn van BP^- de driehoeken aangegeven, die corresponderen met de vertakkingspunten van de eerste 3 niveaux. Aan elke vanuit $\underline{x}_0$ gegenereerde driehoek wordt een drietallig gecodeerd nummer toegevoegd, uitgedrukt in de cijfers 1,2 en 3 met 0 als facultatief cijfer. Aan $\underline{x}_0$ wordt het nummer 0 toegekend.

Vervangt men in een nummer overal waar het daarin voorkomt het cijfer 2 door 3 en 3 door 2, dan zijn de met het oude en nieuwe nummer corresponderende driehoeken congruent (x en y verwisseld). Met elke vertakkingspunt, uitgezonderd die welke zijn gelegen op het rechte pad vanuit $\underline{x}_0$ in de 1-richting corresponderen dus twee congruente driehoeken (van beide is het nummer in tabel 2 aangegeven).

Opm. In het Pythagorese geval is de halfgroep een vrije halfgroep met eenheid met 1,2 en 3 als vrije voortbrengenden. De halfgroep BP^- is weliswaar isomorf met een deelhalfgroep van P, maar hij kan niet eindig voortgebracht worden. (o.a. kan geen van de elementen 2,32, 332, 3332 geschreven worden als product van twee andere elementen).

4A. Bijzondere deelverzamelingen van BP^-

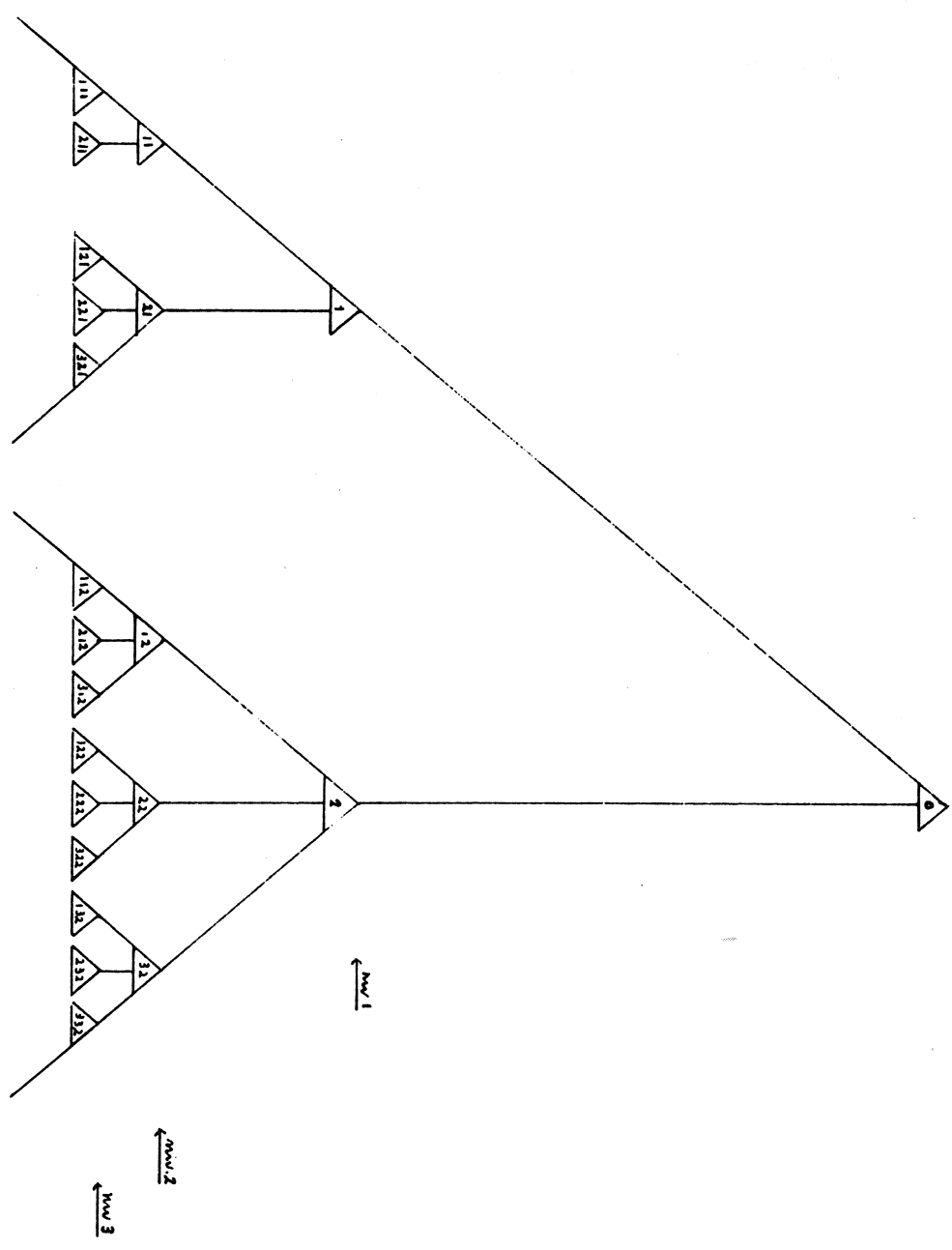
a) Zoals reeds opgemerkt bevat het rechte pad vanuit $\underline{x}_0$ in de 1-richting, juist die driehoeken van BP^- waarvoor $x-y=0$.

Deze deelverzameling van BP^- , die we noemen BP_1^- , wordt dus gevormd door herhaald genereren met A_1 vanuit $(0,0,1)$ (zie figuur 2').

De quotiënten z/x van de gegenereerde driehoeken van BP_1^- zijn naderende breuken van de kettingbreukontwikkeling van $\sqrt{2}$. De recursiebetrekkingen (3), die gelden voor P_1 , zijn ook hier van kracht (nu $v=0$, dus $\underline{x}_{n+1} = 6\underline{x}_{n+1} - \underline{x}_n$).

Zij zijn wat vorm betreft analoog aan de bekende recursiebetrekkingen,

Fig. 2



tabel 2

$$0:\underline{x}_0=(2,2,3)$$

niveau 1

1 : (12 , 12 , 17)

$\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \Big] : (4 , 8 , 9)$

niveau 2

11 : (70, 70 , 99)

$\begin{smallmatrix} 21 \\ 31 \end{smallmatrix} \Big] : (22, 46 , 51)$

$\begin{smallmatrix} 12 \\ 13 \end{smallmatrix} \Big] : (38, 34 , 51)$

$\begin{smallmatrix} 22 \\ 33 \end{smallmatrix} \Big] : (6, 18 , 19)$

$\begin{smallmatrix} 32 \\ 23 \end{smallmatrix} \Big] : (30, 18 , 35)$

niveau 3

111 : (408 , 408 , 577)

$\begin{smallmatrix} 211 \\ 311 \end{smallmatrix} \Big] : (128 , 268 , 297)$

$\begin{smallmatrix} 121 \\ 131 \end{smallmatrix} \Big] : (216 , 192 , 289)$

$\begin{smallmatrix} 221 \\ 331 \end{smallmatrix} \Big] : (32 , 100 , 105)$

$\begin{smallmatrix} 321 \\ 231 \end{smallmatrix} \Big] : (172 , 104 , 201)$

$\begin{smallmatrix} 112 \\ 113 \end{smallmatrix} \Big] : (208 , 212 , 297)$

$\begin{smallmatrix} 212 \\ 313 \end{smallmatrix} \Big] : (72 , 144 , 161)$

$\begin{smallmatrix} 312 \\ 213 \end{smallmatrix} \Big] : (132 , 60 , 145)$

$\begin{smallmatrix} 122 \\ 133 \end{smallmatrix} \Big] : (80 , 68 , 105)$

$\begin{smallmatrix} 222 \\ 333 \end{smallmatrix} \Big] : (8 , 32 , 33)$

$\begin{smallmatrix} 322 \\ 233 \end{smallmatrix} \Big] : (68 , 44 , 81)$

$\begin{smallmatrix} 132 \\ 123 \end{smallmatrix} \Big] : (116 , 128 , 171)$

$\begin{smallmatrix} 232 \\ 323 \end{smallmatrix} \Big] : (64 , 112 , 129)$

$\begin{smallmatrix} 332 \\ 223 \end{smallmatrix} \Big] : (76 , 28 , 81)$

die gelden voor de tellers en noemers van een drietal opeenvolgende naderende breuken met even of oneven rangnummer van genoemde kettingbreukontwikkeling.

De breuk $z/x = \frac{33}{23} \frac{63}{78}$ (zie de 5e driehoek van BP_1^- in figuur 2') geeft een benadering van $\sqrt{2}$ in 7 decimalen nauwkeurig.

b) Naast de deelverzameling BP_1^- beschouwen we nu, analoog aan het Pythagorese geval, eveneens de deelverzamelingen BP_2^- , BP_3^- , BP_{23}^- , BP_{12}^- , BP_{13}^- , BP_{21}^- , BP_{31}^- en BP_{32}^- van BP^- .
Vanwege de tweevoudige vertakking in de vertakkingspunten van rechte pad vanuit x_0 in de 1-richting, geldt hier:

$$BP_2^- = BP_3^-, BP_{23}^- = BP_{32}^-, BP_{12}^- = BP_{13}^- \text{ en } BP_{21}^- = BP_{31}^-.$$

Deze verzamelingen, waarvan enkele driehoeken schematisch in figuur 2' en 2'' worden weergegeven, vertonen soortgelijke eigenschappen als de overeenkomstige Pythagorese verzamelingen.

We vermelden de volgende bijzonderheden

(steeds wordt gegenereerd vanuit $(0,0,1)$):

- $BP_2^- = BP_3^-$: Genererende matrix: A_2 of A_3 .
Eigenschappen der driehoeken: $z-r=1$.
 r' (de andere rechthoekszijde) doorloopt de rij der even getallen.
 r'/r doorloopt de rij der natuurlijke getallen.
- $BP_{23}^- = BP_{32}^-$: Genererende matrices: afwisselend $A_3(A_2)$ en $A_2(A_3)$ of A_3' alleen.
Eigenschappen der driehoeken: $|2r-z|=1$.
- $BP_{12}^- = BP_{13}^-$: Genererende matrices: afwisselend $A_2(A_3)$ en A_1 .
Eigenschappen der driehoeken: afwisselend: a) $|2r-r'|=2$
b) $|3r-2z|=2$.
- $BP_{21}^- = BP_{31}^-$: Genererende matrices: afwisselend A_1 en $A_2(A_3)$.
Eigenschappen der driehoeken: afwisselend: a) $3r-2z=0$
b) $2r-r'=0$.

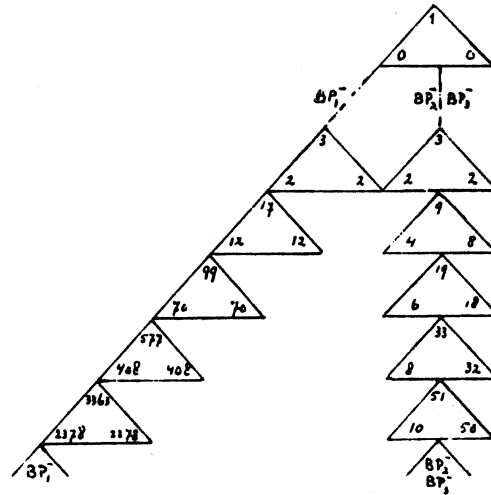


Fig. 2'

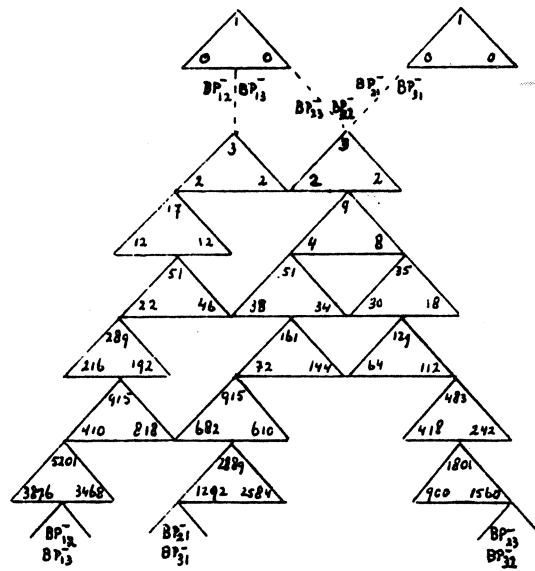


Fig. 2''

Opm. De verhoudingen der zijden impliceren kettingbreukbenaderingen van $\sqrt{5}$.

De breuk $2889/1292$ (zie de 6e driehoek van BP_{21}^- in figuur 2") benadert $\sqrt{5}$ in 6 decimalen nauwkeurig.

Eenvoudig kan worden bewezen, dat ook elke driehoek van BP^- , die aan een van de bovengenoemde eigenschappen voldoet tot de desbetreffende deelverzameling behoort.

Voor de verzamelingen BP_1^- , $BP_2^- (=PB_3^-)$ en $BP_{23}^- (=BP_{32}^-)$ gelden resp. de recursiebetrekkingen (3), (4), en (5).

B. $c=+1$.

Ook in dit geval kunnen we volgens hetzelfde principe als boven met behulp van de matrices A_1, A_2 en A_3 alle driehoeken van BP^+ disjunct genereren. Nu echter worden de driehoeken afgebeeld op de vertakkingspunten van een tweetal bomen (I en II) met als toppen resp. $(2,1,2)$ en $(1,1,1)$. De verzameling driehoeken van I noemen we $\overline{BP}^+$, die van II noemen we $\overline{\overline{BP}}^+$.

In deze tweebomenstructuur vervalt bij II weer de generatie met A_3 , zodra geopereerd wordt op een driehoek met $x=y$. Bij I treden geen driehoeken met gelijke x en y op. De verzameling $\overline{BP}^+$, en evenzo $\overline{\overline{BP}}^+$, vormt een halfgroep met deling en eenheidselement. I heeft analoge structuur als de boom van P, II is analoog aan die van BP^- ; voor de driehoeken van de eerste drie niveaus van I en II zie men de tabellen 3I resp. 3II. Het is ook mogelijk alle driehoeken van BP^+ in één boom te genereren, namelijk door uit te gaan van $\underline{x}_0 = (1,1,1)$ als startdriehoek en van A_1, A_2, A_4 , (A_4 zie onder 3.2)) als genererende matrices. De verzameling BP^+ vormt nu ook een halfgroep met deling en eenheidselement ($\underline{x}_0$). Door overal te genereren met A_1, A_2 en A_3 , echter alleen vanuit de top $\underline{x}_0$ met A_1, A_2 en A_4 kunnen we het optreden van doublures vermijden. In feite ontstaat nu ook bovenvermelde tweebomenstructuur, alleen met dit verschil, dat de toppen nu zijn verbonden: $A_4(1,1,1) = (1,2,2)$.

Het bewijs van de eigenschap, dat $\overline{\overline{BP}}^+$ en $\overline{BP}^+$ samen de volledige verzameling BP^+ vormen, dus dat $\overline{\overline{BP}}^+ + \overline{BP}^+ = BP^+$ kan op analoge wijze geleverd worden als in het geval $A(c=-1)$ en het Pythagorese geval.

tabel 3 I (behorende bij boomstructuur analoog figuur 1)

$$0:\underline{x}_0=(2,1,2)$$

niveau 1

1 : (8,9,12)
2 : (4,7, 8)
3 : (4,1, 4)

niveau 2

11 : (50,49,70)
21 : (14,31,34)
31 : (34,17,38)
12 : (34,31,46)
22 : (6,17,18)
32 : (26,15,30)
13 : (14,17,22)
23 : (10,15,18)
33 : (6, 1, 6)

niveau 3

111 : (288,289,408)
211 : (92,191,212)
311 : (188, 89,208)
121 : (144,127,192)
221 : (20, 65, 68)
321 : (116, 71,136)
131 : (144,161,216)
231 : (76,127,148)
331 : (76, 25, 80)
112 : (188,191,268)
212 : (64,129,144)
312 : (120, 55,132)
122 : (76, 65,100)
222 : (8, 31, 32)
322 : (64, 41, 76)
132 : (116,127,172)
232 : (56, 97,112)
332 : (64, 23, 68)
113 : (92, 89,128)
213 : (24, 55, 60)
313 : (64, 33, 72)
123 : (76, 71,104)
223 : (16, 41, 44)
323 : (56, 31, 64)
133 : (20, 25, 32)
233 : (16, 23, 28)
333 : (8, 1, 8)

tabel 3 II (behorende bij boomstructuur analoog figuur 2)

$$0:\underline{x}_0=(1,1,1)$$

niveau 1

1 : (5,5,7)

$\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \Big] : (1,3,3)$

niveau 2

11 : (29,29,41)

$\begin{smallmatrix} 21 \\ 31 \end{smallmatrix} \Big] : (9,19,21)$

$\begin{smallmatrix} 12 \\ 13 \end{smallmatrix} \Big] : (13,11,17)$

$\begin{smallmatrix} 22 \\ 33 \end{smallmatrix} \Big] : (1,5,5)$

$\begin{smallmatrix} 32 \\ 23 \end{smallmatrix} \Big] : (11,7,13)$

niveau 3

111 : (169,169,239)

$\begin{smallmatrix} 211 \\ 311 \end{smallmatrix} \Big] : (53,111,123)$

$\begin{smallmatrix} 121 \\ 131 \end{smallmatrix} \Big] : (89,79,119)$

$\begin{smallmatrix} 221 \\ 331 \end{smallmatrix} \Big] : (13,41,43)$

$\begin{smallmatrix} 321 \\ 231 \end{smallmatrix} \Big] : (71,43,83)$

$\begin{smallmatrix} 112 \\ 113 \end{smallmatrix} \Big] : (69,71,99)$

$\begin{smallmatrix} 212 \\ 313 \end{smallmatrix} \Big] : (25,49,55)$

$\begin{smallmatrix} 312 \\ 213 \end{smallmatrix} \Big] : (43,19,47)$

$\begin{smallmatrix} 122 \\ 133 \end{smallmatrix} \Big] : (21,17,27)$

$\begin{smallmatrix} 222 \\ 333 \end{smallmatrix} \Big] : (1,7,7)$

$\begin{smallmatrix} 322 \\ 233 \end{smallmatrix} \Big] : (19,13,23)$

$\begin{smallmatrix} 132 \\ 123 \end{smallmatrix} \Big] : (51,55,75)$

$\begin{smallmatrix} 232 \\ 323 \end{smallmatrix} \Big] : (23,41,47)$

$\begin{smallmatrix} 332 \\ 223 \end{smallmatrix} \Big] : (29,11,31)$

4B. Bijzondere deelverzamelingen van BP^+

Ook van BP^+ beschouwen we de speciale deelverzamelingen, analoog aan die van P en BP^- . Door de tweebomenstructuur is elk van deze deelverzamelingen de som van twee verzamelingen, waarvan de ene tot $\overline{BP}^+$ behoort en de andere tot $\overline{\overline{BP}}^+$.

We onderscheiden ze weer door een enkele streep en een dubbele streep, boven de naamsaanduiding. We vermelden de volgende bijzonderheden: (voor een schematische weergave van een aantal driehoeken van de deelverzamelingen, zie de figuren 3I', 3I'', 3II' en 3II''; steeds wordt gegenereerd vanuit $(0, \pm 1, 0)$ resp. $(1, 1, -1)$ of $\pm 1, \overline{\pm 1}, -1$; r = een rechthoekszijde; is r de ene, dan is r' de andere rechthoekszijde).

BP_1^+ : Genererende matrix: A_1 .

Eigenschappen der driehoeken: $\overline{BP}_1^+$: a) $|r-r'|=1$

$\overline{\overline{BP}}_1^+$: b) $r-r'=0$.

$\overline{BP}_1^+$ en $\overline{\overline{BP}}_1^+$ bevatten ook juist alle driehoeken van BP^+ , die voldoen aan a) resp. b).

BP_2^+ : Genererende matrix: A_2 .

Eigenschappen der driehoeken: $\overline{BP}_2^+$: a) $z-r=1$ (de waarden r' doorlopen de rij der even getallen)

$\overline{\overline{BP}}_2^+$: b) $z-r=0$ (de waarden z doorlopen de rij der oneven getallen, $r'=1$).

$\overline{BP}_2^+$ bevat ook juist alle driehoeken van BP^+ , die voldoen aan a). Met betrekking tot de eigenschap b), zie bij BP_3^+ .

BP_3^+ : Genererende matrix: A_3 .

Eigenschappen der driehoeken: $\overline{BP}_3^+$: dezelfde als voor $\overline{\overline{BP}}_2^+$, alleen doorlopen de waarden z nu de rij der even getallen.

$$\overline{\overline{BP}}_3^+ = \overline{\overline{BP}}_2^+.$$

BP_3^+ bevat ook juist alle driehoeken, waarvoor $z-r=0$.

Voor $\overline{BP}_1^+$ ($\overline{\overline{BP}}_1^+$) resp. $\overline{BP}_2^+$ ($\overline{\overline{BP}}_2^+$), $\overline{BP}_3^+$ ($\overline{\overline{BP}}_3^+$) gelden de recursiebetrekkingen (3) resp. (4).

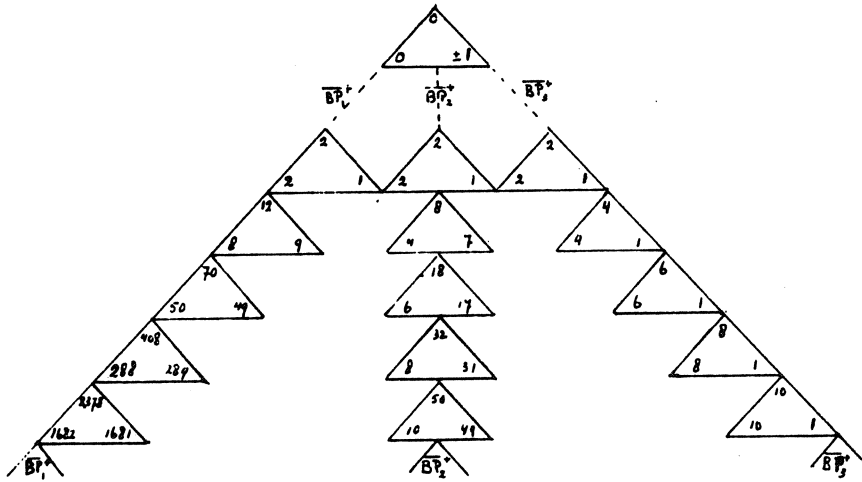


Fig. 3 I'

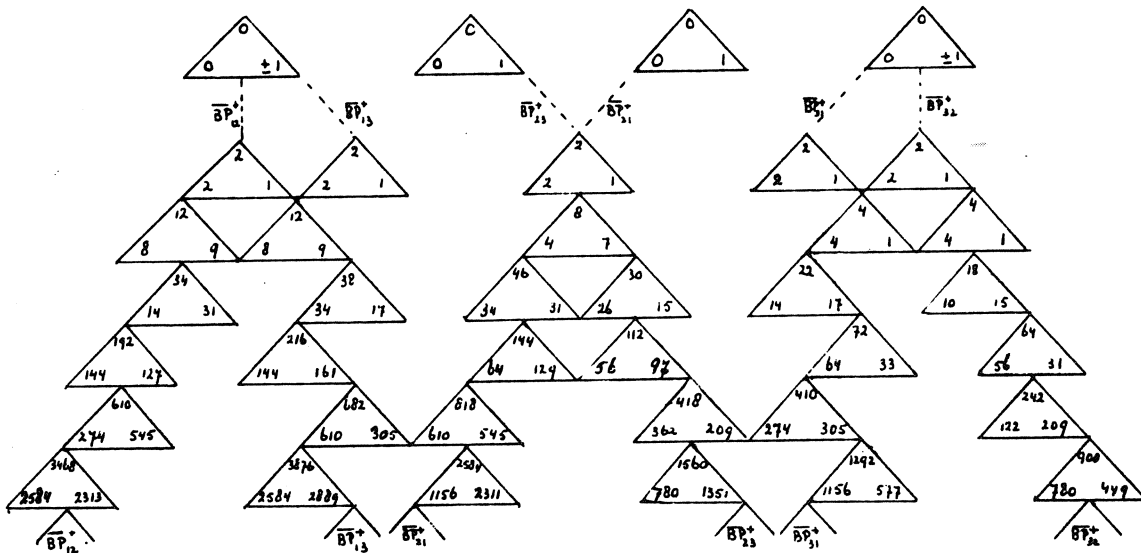


Fig. 3 I''

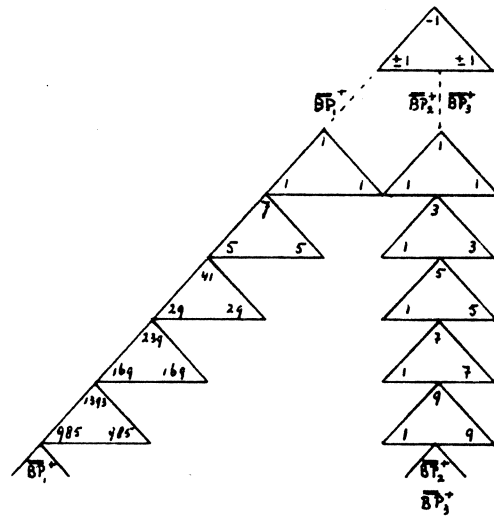


Fig. 3 II'

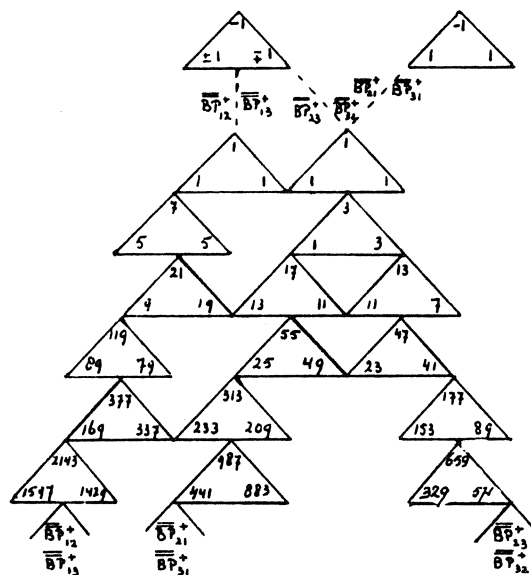


Fig. 3 II''

BP_{23}^+ : Genererende matrices: afwisselend A_3 en A_2 of A_3'' alleen (bij $\overline{BP}_{23}^+$ ook met A_3' alleen).

Eigenschappen der driehoeken: $\overline{BP}_{23}^+$: a) $2r-z=0$

$\overline{BP}_{23}^+$: b) $|2r-z|=1$.

$\overline{BP}_{23}^+$ en $\overline{BP}_{23}^+$ bevatten ook juist alle driehoeken van BP^+ , die voldoen aan a) resp. b).

Als recursieformule geldt formule (5).

BP_{12}^+ : Genererende matrices: afwisselend A_2 en A_1 .

Eigenschappen der driehoeken: $\overline{BP}_{12}^+$: afwisselend geldt: a) $|2r-r'|=3$
b) $|3r-2z|=3$.

$\overline{BP}_{12}^+$: afwisselend geldt: c) $|2r-r'|=1$
d) $|3r-2z|=1$.

Uitbreiding van de deelverzameling $\overline{BP}_{12}^+$ van $\overline{BP}^+$ met de deelverzameling van $\overline{BP}^+$ bestaande uit alle driehoeken, die uit $(-1,1,1)$ en $(1,-1,1)$ worden gegenereerd door afwisselend toe te passen de genererende matrices A_1 en A_2 geeft de deelverzameling van BP^+ van alle driehoeken, die voldoen aan de eigenschap a) of b).

Met betrekking tot de eigenschap c) en d), zie bij BP_{21}^+ .

BP_{13}^+ : Genererende matrices: afwisselend A_3 en A_1 .

Eigenschappen der driehoeken $\overline{BP}_{13}^+$: afwisselend geldt: a) $2r-r'=0$
b) $3r-2z=0$.

$$\overline{BP}_{13}^+ = \overline{BP}_{12}^+.$$

$\overline{BP}_{13}^+$ bevat ook juist alle driehoeken van BP^+ , die voldoen a) of b).

BP_{21}^+ : Genererende matrices: afwisselend A_1 en A_2 .

Eigenschappen der driehoeken: $\overline{BP}_{21}^+$: afwisselend geldt: a) $|3r-2z|=1$
b) $|2r-r'|=1$.

$\overline{BP}_{21}^+$: afwisselend geldt: a) $|3r-2z|=1$
b) $|2r-r'|=1$.

Uitbreiding van de verzameling $\overline{BP}_{21}^+$ met de verzameling $\overline{BP}_{12}^+$ geeft de deelverzameling van BP^+ van alle driehoeken, die voldoen aan a) of b).

BP_{31}^+ : Genererende matrices: afwisselend A_1 en A_3 .

Eigenschappen der driehoeken: $\overline{BP}_{31}^+$, afwisselend geldt: a) $|3r-2z|=2$
b) $|2r-r'|=2$.

$$\overline{BP}_{31}^+ = \overline{BP}_{21}^+$$

$\overline{BP}_{31}^+$ bevat ook juist alle driehoeken van BP^+ , die voldoen aan a) of b).

BP_{32}^+ : Genererende matrices: afwisselend A_2 en A_3 of met A_3' alleen (bij

$\overline{BP}_{32}^+$ ook met A_3'' alleen).

Eigenschappen der driehoeken: $\overline{BP}_{32}^+$: a) $|2r-z|=2$.

$$\overline{BP}_{32}^+ = \overline{BP}_{23}^+$$

$\overline{BP}_{32}^+$ bevat ook juist alle driehoeken van BP^+ , die voldoen aan a).

Als recursieformule geldt formule (5).

Opmerkingen

- a) De verzameling $\overline{BP}_1^+$ heeft nog een merkwaardige eigenschap. Er geldt namelijk, dat van elke driehoek van deze verzameling de oneven rechthoekszijden kwadraten zijn en de even rechthoekszijden het dubbele van een kwadraat. Dit kan eenvoudig als volgt worden aangetoond: Uit $x^2 + (x+1)^2 = z^2 + 1$ volgt $2x(x+1) = z^2$. Daar x en $x+1$ altijd onderling priem zijn en dus ook $2x$ en $x+1$, is $x+1$ (als x = even dus de oneven rechthoekszijde) een oneven kwadraat en x het dubbele van een kwadraat (resp. de kwadraten van de termen van de rij $t_{n+2} = 2t_{n+1} + t_n$ met $t_0 = 1$ resp. -1 , $t_1 = 1$).

Voor $c = -1$ zijn er geen gehele oplossingen van (7), waarvoor $|x-y|=1$. Dit volgt direct uit het feit, dat (7) met $c = -1$ voor $x=0, y=+1$ geen gehele waarde van z geeft.

- b) Voor de driehoeken van de verzameling $\overline{BP}_1^+$ geldt, dat de rechthoekszijden juist gelijk zijn aan de schuine zijden van de driehoeken van P_1 . Immers in de recursiebetrekkingen (3) is nu $v=0$ en dus $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$. (zie onder 4A). De quotiënten van schuine zijde en rechthoekszijde geven dezelfde benaderingen voor $\sqrt{2}$, als die welke ook volgen uit diens kettingbreukontwikkeling (zie ook BP_1^-).

- c) De matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ heeft de eigenschap, dat $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(d.i. A_1 , waarvan de eerste en de tweede kolom zijn verwisseld). M^2 is dus een genererende matrix. M is dat niet. M heeft echter wel de eigenschap, dat uitgaande van de driehoek $(0,1,1)$ ermee afwisselend Pythagorese en bijna-Pythagorese driehoeken (met $c=+1$) kunnen worden gegenereerd: $(1,2,2)$, $(3,4,5)$, $(8,9,12)$, $(20,21,29)$, $(49,50,70)$, $(120,119,169)$ enz. afwisselend dus juist de driehoeken van $\overline{BP}_1^+$ en P_1 .

De driehoeken (x_n, y_n, z_n) van deze rij voldoen aan de recursie-relaties:

$$\begin{cases} x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n + 1 \\ y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n - 1 \\ z_{n+2} = 2z_{n+1} + z_n \end{cases}$$

- d) De zijden van de driehoeken van $\overline{BP}_{23}^+$ impliceren (kettingbreuk) benaderingen voor $\sqrt{3}$, n.l. $2/1$, $7/4$, $26/15$, $97/56$, $362/209$, $1351/780$ enz. De laatste breuk benadert $\sqrt{3}$ in 6 decimalen nauwkeurig.
- e) De zijden van de driehoeken van $\overline{BP}_{13}^+$ impliceren (kettingbreuk) benaderingen voor $\sqrt{5}$, die overeenkomen met die vermeld bij BP_{21}^- .
- f) Vergelijken we in figuur 3I" de in gelijke niveaus gelegen driehoeken van een tweetal verzamelingen uit $\overline{BP}_{12}^+$, $\overline{BP}_{13}^+$, $\overline{BP}_{21}^+$ en $\overline{BP}_{31}^+$, dan merken we op, dat om de andere de x of y -waarden van deze driehoeken overeenstemmen. Bij enkele paren treedt de gelijke x -waarde ook als z -waarde op van een derde verzameling. Zo hebben bijv. de in gelijke oneven niveaus gelegen driehoeken van de verzameling $\overline{BP}_{12}^+$ en $\overline{BP}_{13}^+$ gelijke x -waarden, die overeenstemmen met de z -waarden van de in hetzelfde niveau gelegen driehoeken van de verzameling $\overline{BP}_{21}^+$. De in gelijke even niveaus gelegen driehoeken van $\overline{BP}_{12}^+$ en $\overline{BP}_{21}^+$ vertonen de eigenschap, dat de y -waarden overeenstemmen.

De rechthoekszijden van de in het 2e niveau gelegen driehoeken zijn 14, 17, 31 en 34. Dit viertal getallen heeft blijkbaar de eigenschap, dat elke combinatie van een even en een oneven getal de rechthoekszijden vormt van een driehoek van BP^+ .

Vele van dergelijke eigenschappen zouden nog kunnen worden genoemd. Het zou ons te ver voeren hier nader op in te gaan.

De schrijver is dank verschuldigd aan Dr. Th.J. Dekker en de medewerkers der Afdeling Zuivere Wiskunde van het Mathematisch Centrum voor getoonde belangstelling in bovenstaand onderzoek. In het bijzonder dankt hij de heer P.C. Baayen voor het doorlezen van het manuscript en het geven van enkele nuttige preciseringen.

Literatuur:

- [1] : Ittmann, G.P. Pythagorese driehoeken, Euclides 37, IV, 1961-'62
119-122.
- [2] : Pepin, T. Mem.Pont. Accad. Nuovi Lincei, 8, 1892, 84-108;
extract in Oeuvres de Fermat, 4, 1912, 205-207.
- [3] : Fermat, P. Oeuvres II, 231.
- [4] : Fermat, P. Oeuvres II, 224-225, 258; Sphinx-Oedipe, 7, 1912,
103-104.

ERRATA

bij rapport

ZW 1963-011

<u>Blz.</u>	<u>Regel</u>	<u>Er staat:</u>	<u>Dit moet zijn:</u>
5	16 v. b.	men	met
8	16 v. o.	decodeerd	gecodeerd
	9 v. o.	niveax	niveaux
	5 v. o.	zijfer	cijfer
15	9 v. o.	eenheidelement	eenheidselement
19	10 v. b.	Ook de	De
22	13 v. b.	0,01)	(0,0,1)
	2 v. o.	, dat enz	, dat (x,y,z) en (y,x,z) met $x \neq y$ niet beide als drie- hoeken van de boom kunnen optreden.
23	1 v. b.	woordje "niet"	
		vervalt	